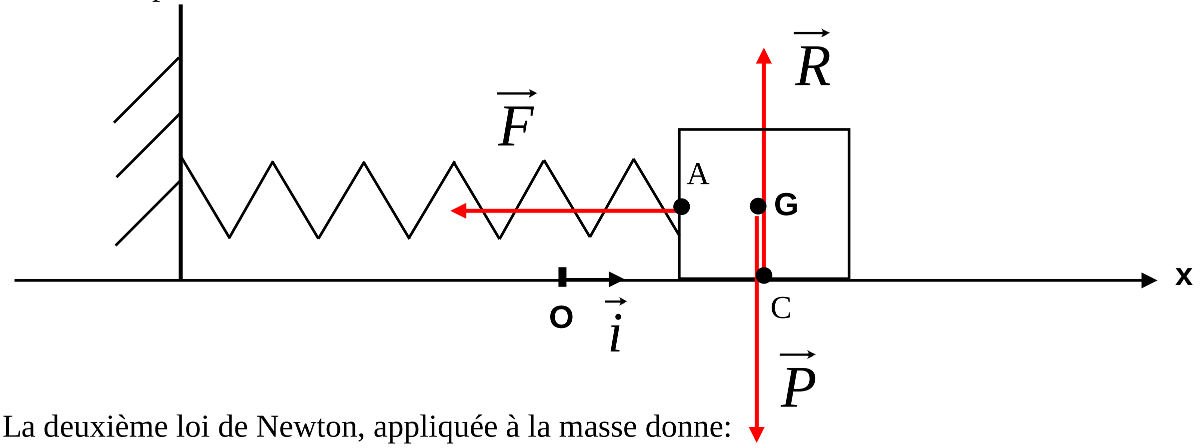
I - L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

1. Le système étudié est **la masse**. L'étude du mouvement de la masse est réalisée dans le **référentiel terrestre, supposé galiléen**.

La masse est soumise à 3 forces:

- le poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ vertical vers le bas, appliqué en G
- la réaction du rail $\vec{R}$, verticale vers le haut car la masse se déplace sans frottement, appliquée en C.
- La force de rappel du ressort $\vec{F}$, horizontale orientée vers le point O: $\vec{F} = -k.x.\vec{i}$, appliquée au point A.



2. La deuxième loi de Newton, appliquée à la masse donne:

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}$$

En projection suivant l'axe horizontal (Ox) orienté selon le vecteur unitaire $\vec{i}$, il vient:

$$0 + 0 - k.x = m.a_x = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

soit $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0}$$

On constate que l'équation différentielle du mouvement s'écrit bien:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2.x = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

3. Montrons que l'expression $x(t) = A.\sin(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle:

$$\frac{dx}{dt} = A.\omega_0.\cos(\omega_0.t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A.\omega_0^2.\sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2.x$$

En reportant dans l'équation différentielle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2.x = -\omega_0^2.x + \omega_0^2.x = 0.$$

L'expression $x(t) = A.\sin(\omega_0 t + \varphi)$ est bien solution de l'équation différentielle du mouvement.

4. Les conditions initiales sont: à t = 0 s, x_0 = 2 cm et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0s} = 0$

donc: $x(0) = x_0 = A.\sin(\varphi)$

et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0s} = 0 = A.\omega_0.\cos(\varphi)$ donc $\cos(\varphi) = 0$ soit $\varphi = \pm \pi / 2$

Or x_0 et A sont positifs donc $\sin(\varphi) > 0$ donc la seule valeur de φ possible est: $\boxed{\varphi = +\pi / 2}$

Et $x_0 = A.\sin(\pi/2)$ soit $\boxed{x_0 = A = 2 \text{ cm}}$

Finalement, en exprimant x(t) en cm: $\mathbf{x(t)} = 2\sin(\omega_0.t + \pi/2) = \mathbf{2\cos(\omega_0.t)}$

$$\boxed{x(t) = 2\cos(\omega_0.t)}$$

5. La période propre T_o des oscillations est telle que: $x(t) = x(t + T_o)$

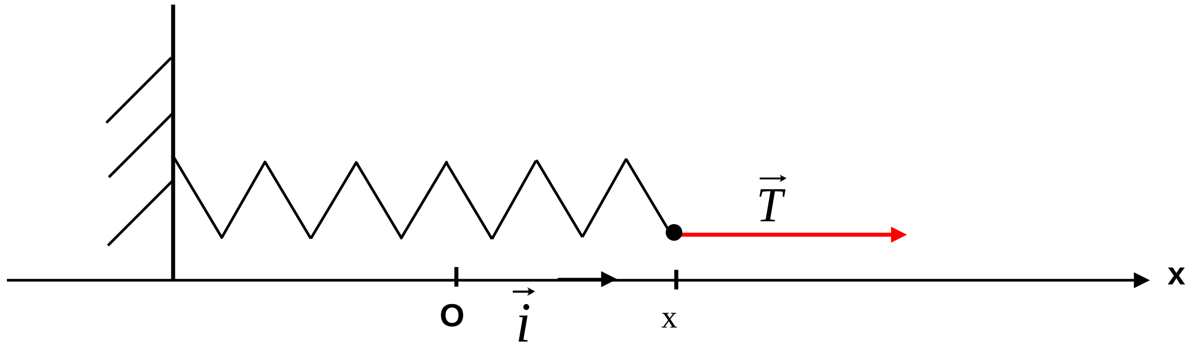
$$\cos(\omega_0.t) = \cos(\omega_0.t + \omega_0.T_o)$$

Une solution est: $\omega_0.T_o = 2\pi$ (modulo 2π)

Donc: $T_o = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ finalement: $\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$

II - ETUDE ENERGETIQUE

1. Soit $\vec{T}$ une force extérieure appliquée **au ressort** qui maintienne le ressort avec un allongement x constant. Cette force est opposée à la force $\vec{F}$ de rappel du ressort, donc $\vec{T} = k.x.\vec{i}$



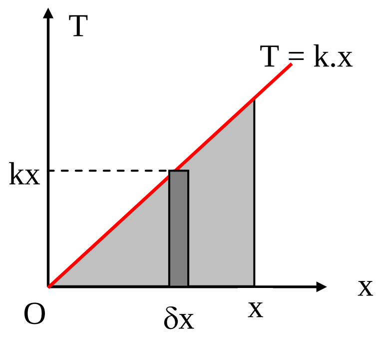
Pour provoquer un allongement supplémentaire très petit δx de l'extrémité du ressort (pour lequel $\vec{T}$ est restée constante), il faut fournir le travail élémentaire δW tel que:

$$\delta W = \vec{T}.\overrightarrow{\delta x} = k.x.\ \vec{i}\ .\ \delta x.\ \vec{i}\ = k.x.\delta x$$

Par intégration, le travail W effectué par la force $\vec{T}$ pour un allongement x à partir de l'origine O est alors:

$$\boxed{W = \int_0^x k.x.\delta x = ½.k.x^2}$$ avec k constante.

Par méthode graphique:
Le travail élémentaire δW correspond à l'aire du petit rectangle, en gris foncé, de hauteur k.x et de largeur δx.



Le travail W correspond à l'aire du triangle en gris clair, dont les cotés ont pour longueur x et kx.
Soit $W = ½.k.x^2$
W est la somme des aires des petits rectangles.

2. L'énergie potentielle élastique E_{pe} du système {masse - ressort} est égale au travail W de la force $\vec{T}$ soit:

$$\boxed{E_{pe} = ½.k.x^2}$$

à une constante additive près choisie nulle ici.

3. L'expression de l'énergie cinétique est $\boxed{E_c = ½.m.v_x^2}$

L'expression de l'énergie totale du système est: $\boxed{E_m = E_c + E_{pe} = ½.m.v_x^2 + ½.k.x^2}$

4. L'énergie mécanique du système reste constante car la masse oscille **sans frottement** sur le rail.
À l'instant initial pour lequel $x = x_0$ et $v_x = 0\ m.s^{-1}$:

$$\boxed{\mathbf{E_m = ½\ .\ k\ .\ x_0^2}}$$

III - APPLICATION A LA MOLECULE DE CHLORURE D'HYDROGENE

1. On a: $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Il faut exprimer m la masse d'un atome d'hydrogène en fonction des données. La masse molaire atomique est la masse d'une mole d'atomes d'hydrogène, soit la masse de N_A atomes d'hydrogène.

Donc $m = \frac{M}{N_A}$.

Alors $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{M}{N_A.k}}$ *Attention M à exprimer en kg.mol^{-1}*

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}00\times10^{-3}}{6{,}02\times10^{23}\times510}}$$

$\boxed{\mathbf{T_o = 1{,}13\times10^{-14}\ s}}$

2. On observera le phénomène de résonance lorsque le résonateur est excité par une onde électromagnétique de fréquence ν égale à $1/T_o$:

$\boxed{\nu = \frac{1}{T_o} = 8{,}82.10^{13}\ \text{Hz}}$ *calcul effectué avec la valeur non arrondie de T_0*

3. Dans le vide, on a la relation: $\lambda = \frac{c}{\nu}$ soit $\boxed{\lambda = c \times T_o}$

$\lambda = 3{,}00\times10^{8}\times1{,}13.10^{-14} =$ **$3{,}40\times10^{-6}$ m = 3,40 μm**. *calcul effectué avec la valeur non arrondie de T_0*

Sachant que les longueurs d'onde, dans le vide, des ondes lumineuses sont comprises entre 400 nm (violet) et 800 nm (rouge); soit 0,400 μm et 0,800 μm, la radiation de l'onde excitatrice correspond au **domaine de l'infrarouge car λ > 0,800 μm.**

4. Soit m' la masse du deutérium qui est le double de la masse de l'hydrogène : m' = 2.m, alors:

$$T'_o = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.\sqrt{2} = \sqrt{2}.T_o.$$

La fréquence propre de vibration ν' est alors: $\nu' = \frac{1}{T'_o} = \frac{1}{\sqrt{2}.T_o} = \frac{\nu}{\sqrt{2}}$;

$$\boxed{\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{2}}}$$

Si la masse double alors la fréquence de vibration est divisée par racine de 2.